01
UNIDAD

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Víctor Román.

Docente:
Matemáticas generales.

Institución universitaria ESCOLME.

educación
a distancia - Virtual
Hace realidad tu proyecto de vida

1.1 Presentación de la unidad.

En esta unidad estudiaremos algunas definiciones importantes para tener claridad conceptual sobre las diferentes clases de números, los cuales llevaran en su efecto a definir los números reales, propiedades y forma de resolver términos exponenciales y radicales, básicos para el desarrollo de cualquier problema cotidiano que se pueda presentar.

1.2 Justificación de la unidad.

En nuestro medio a veces se torna en dialecto común algunas expresiones aritméticas, que aunque no tengan conocimientos de ellas se emplean para su trabajo, tales como en personas de oficio de mecánica “llaves de ¾, 1 ½”, para las personas de carnicería, 3 ¼ de carne, etc. sin embargo, el tratamiento matemático que tengan incluidas operaciones con números racionales y/o irracionales son de mucha utilización.

1.3 Competencias de la unidad.

Para el desarrollo del conocer: Conocimiento, clasificación y distinción de los números racionales así como conocer sus propiedades para aplicarlos operativamente en los diferentes ejercicios propuestos.

Conoce la potenciación y radicación de un número real y sus propiedades.

Para el desarrollo del hacer. Realiza cálculos aritméticos con fraccionarios y números enteros aplicando sus propiedades; aplica propiedades de potenciación y radicación en números reales.

1.4 Objetivo general de la unidad.

Operar y resolver problemas matemáticos con números fraccionarios, exponenciales y radicales.

1.5 Objetivos específicos de la unidad.

- Identificar y resolver ejercicios con números racionales e irracionales.
- Realizar con destreza las operaciones fundamentales de suma, resta, producto y división de Radicales.
- Adquirir un manejo operacional con exponentes y radicales.

1.6 Desarrollo de la unidad.

1.6.1 Sistemas numéricos.

SISTEMAS NUMERICOS

El primer sistema numérico que el hombre utilizó fue el de los números naturales definidos como N y que son todos los números positivos así N={1,2,3,4,5 _____ ∝}.

Luego invento un sistema más grande que los naturales y son los enteros definidos como Z (que comprenden los negativos, el cero y los positivos), es decir: Z={- ∝, -3,-2,-1,0,1,2,3... ∝}.

Más tarde invento un sistema aun mayor, que fueron los fraccionarios identificados como Q, definidos como:

La relación de dos enteros: $\frac{p \in z}{q \in z}$ pero q, nunca podrá ser 0, y se lee "p pertenece a los número enteros", y q se lee "q pertenece a los números enteros"

Obsérvese que los números pueden ser positivos o negativos; ejemplos característicos en su aplicación diaria:

Existían otros números que no podían expresarse como la relación de dos enteros y los llamó los irracionales, denotados como Q'.

Los números irracionales son aquellos números que no tienen una raíz exacta.

Ejemplos de algunos de estos tenemos: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3},$ etc.

Entre la unión de los Q y los Q' formó el sistema de los números reales denotados como R y definidos como Q U Q'= R.

1.6.2 Términos de un fraccionario:

Un fraccionario consta de dos términos, llamados NUMERADOR y DENOMINADOR.

El Denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad, y el Numerador, indica cuantas de esas partes se toman.

Así $\frac{5}{8}$, el denominador 8 indica que la unidad se ha divido en 8 partes iguales, y el numerador 5 nos indica que se han tomado 5 partes iguales.

Para leer un fraccionario se enuncia primero el numerador y luego el denominador. Si el denominador es 2 se lee medios; si es 3 se lee tercios; si es 4 se lee cuartos; si es 5 se lee quintos; si es 10 se lee décimos, así:

$\frac{5}{9}$ Se lee cinco novenos; $\frac{7}{3}$ Se lee siete tercios, $\frac{9}{20}$ Se lee nueve veinteavos

1.6.2 Clases de fraccionarios:

Los fraccionarios se dividen en: Fraccionarios Comunes y Fraccionarios Decimales.

- **Comunes:** aquellos cuyo denominador no es la unidad seguida de ceros, así:

$\frac{7}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{15}$

- **Decimales:** son aquellos cuyo denominador es la unidad seguida de ceros, así:

$\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{11}{1000}$

Los Fraccionarios pueden ser también **Propios** o **Impropios**.

- **Fraccionario Propio:** es aquel cuyo numerador es menor que el denominador así:

$\frac{5}{9}, \frac{7}{13}, \frac{5}{8}$

- **Fraccionario Impropio**: es aquel cuyo numerador es mayor que el denominador así:

$\frac{8}{7}, \frac{7}{2}, \frac{11}{5}, \frac{13}{8}$

Los Fraccionarios también pueden ser **Homogéneos o Heterogéneos**.

⌖ **Fraccionarios Homogéneos:** son aquellos que tienen igual denominador

⌖ **Fraccionarios Homogéneos:** son aquellos que tienen igual denominador así:

a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4};$ **b)** $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}$

Explicación enlace http://www.youtube.com/user/julioprofe

⌖ **Fraccionarios Heterogéneos:** son aquellos que tienen diferente denominador así:

a) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{8};$ **b)** $\frac{7}{3}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}$

Número Mixto: es aquel que consta de una parte entera y fraccionario así:

$3\frac{2}{3},$ $5\frac{4}{7},$ $6\frac{5}{2},$ $9\frac{1}{2}$

Para resolver un número mixto se procede así: se multiplica el entero por el denominador de fraccionario, se le suma el numerador y se coloca el mismo denominador, por ejemplo:

:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \bullet 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

$$5\frac{1}{2} = \frac{5 \bullet 2 + 1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$7\frac{2}{3} = \frac{7 \bullet 3 + 2}{3} = \frac{23}{3}$$

Explicación operación números mixtos http://www.youtube.com/user/julioprofe

1.6.2 Operaciones con los números fraccionarios

- **Suma y resta.** Se procede así**:**

Si los fraccionarios son homogéneos (que tienen igual denominador), se pone el mismo denominador y se realizan las operaciones indicadas en los numeradores según el signo que lo antecedan.

Ejemplos:

1). $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=\frac{1+3+5}{2}=\frac{9}{2}$ **R.**

2). $\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}-\frac{8}{3}=\frac{5-1+7-8}{3}=\frac{3}{3}=1$ **R.**

3). $\frac{17}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=\frac{17-3-1-5}{4}=\frac{8}{4}=2$ **R.**

Link para sumar fraccionarios

http://www.youtube.com/watch?v=UxGz7diPrpw

http://www.youtube.com/watch?v=x3k-O_jtxoU

Si los fraccionarios son heterogéneos (diferentes denominadores), se busca el mínimo común denominador (m.c.m), que es el menor número múltiplo que contiene a los demás divisores, se procede así: se descomponen los números en factores primos, luego el m.c.m será el producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente, así:

Eje. 1. Hallar el m.c.m de 50, 80, 120, 300

50	2	80	2	120	2	300	2
25	5	40	2	60	2	150	2
5	5	20	2	30	2	75	3
1		10	2	15	3	25	5
		5	5	5	5	5	5
		1		1		1	

$50 = \underline{2}\bullet\underline{5}^2$

$80 = 2^4\bullet 5$

$120 = 2^3\bullet 3\bullet 5$

$300 = 2^2\bullet 3\bullet 5^{(2)}$

El m.c.m estará formado por el factor primo **<u>2</u>** elevado a su mayor exponente que es **4**, multiplicado por el factor primo **5** elevado a su mayor exponente que es **(2)**, multiplicado por el factor primo **3**, elevado a su mayor exponente que es **1** luego el m.c.m de:

$50, 80, 120, 300 = 2^4\bullet 5^2\bullet 3 = 1200$

Ejm. 2. Hallar el m.c.m de 24, 48, 56, 168.

Como 24 es divisor de 48; y 56 es divisor de 168 prescindimos de 24 y 56 y hallaremos solamente el m.c.m de 48 y 168 porque todo múltiplo común de estos números será múltiplo de 24, 56, entonces.

48	2	168	2
24	2	84	2
12	2	42	2
6	2	21	3
3	3	7	7
	1		1

Luego el m.c.m de 24, 48, 56, 168 = $24 \cdot 3 \cdot 7 = 336$ R

Ahora sí, veamos la suma y resta de fraccionarios heterogéneos.

Ejm. 1. $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{23}{60}$ Hallamos el m.c.m de 4, 7, 60 que es 420

Así tendremos $=\frac{105+180+161}{420}=\frac{446}{420}=\frac{223}{210}$

Ejm. 2. Efectuar $\frac{7}{6}-\frac{7}{8}$ el m.c.m de 6 y 8 es 24 entonces

$$\frac{7}{6}-\frac{7}{8}=\frac{28-21}{24}=\frac{7}{24}$$

Ej. 3. $\frac{7}{15}-\frac{3}{20}+\frac{5}{12}=\frac{28-9+25}{60}=\frac{44}{60}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$ **R.**

Explicación suma y resta de fraccionarios

http://www.youtube.com/watch?v=7eCKIMYzfCg

Multiplicación de fraccionarios: para multiplicar fraccionarios se procede así:

- Se multiplica numeradores entre si
- Se multiplican denominadores entre si
- Se tiene en cuenta la ley de signos
- El resultado final se simplifica si es posible así:

Resolver lo indicado:

Ej. 1. $\frac{2}{3}\bullet\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$

Ej. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1\bullet 2\bullet 3}{2\bullet 3\bullet 5}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$ es positivo por la ley de signos.

Ej. 3. $\left(\frac{3}{2}\right)\left(-4\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{60}{4}=15$ **R.**

Recuerda todo entero se puede convertir en un fraccionario, colocándole como denominador uno así:

$4=\frac{4}{1},\ 2=\frac{2}{1}$

Recuerda la ley de signos que dice: producto de signos iguales es positivo y el producto de signos contrarios es negativo, así:

$$+\bullet+=+$$
$$-\bullet-=+$$
$$+\bullet-=-$$
$$-\bullet+=-$$

Ej. 3. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)=-\frac{30}{30}=-1$

División de fraccionarios: para dividir dos fraccionarios, se presentan dos casos:

- Que tengan esta presentación : $\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}$
- Que tengan esta presentación: $\frac{a/b}{x/y}$

Si es de la primera forma, se multiplican en cruz y se simplifica el resultado si es posible, así:

Ej. 1. $\frac{3}{4}\div\frac{5}{2}=\frac{3\bullet 2}{4\bullet 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

Ej. 2. $\frac{7}{3}\div\frac{4}{3}=\frac{7\bullet 3}{3\bullet 4}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}$

Ej. 3. $-\frac{5}{3}\div\frac{2}{7}=\frac{-5\bullet 7}{3\bullet 2}=\frac{-35}{6}$ **R.**

Si tienen esta presentación: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}$ se multiplican los extremos y se divide por el producto de los medios, así:

$$\frac{\cancel{5}/3}{2/\cancel{5}} = \frac{5 \bullet 5}{3 \bullet 2} = \frac{25}{6}$$

Ej. 2. $\frac{-7/\cancel{3}}{-2/\cancel{5}} = \frac{7 \bullet 5}{3 \bullet 2} = \frac{35}{6}$

Recuerda: en la división también hay que tener en cuenta la ley de signos, por esa razón el resultado anterior es positivo, porque menos por menos es positivo.

Ej. 3. $\frac{-3/4}{5} = \frac{-3/4}{5/1} = -\frac{3 \bullet 1}{4 \bullet 5} = -\frac{3}{20}$

1.6.3 Potenciación.

El producto de x • x • x se abrevia como x^3 donde x es la base y el numeral 3 es el exponente, en general, para un entero positivo, n en x^n es la abreviatura de n veces x. Por ejemplo:

Se tiene que:

1. $x^n = x \bullet x \bullet x \bullet \bullet \bullet x \Rightarrow$ **n** factores

Para el caso de n, como exponente negativo (-n), lo ilustramos a continuación, para su explicación se detallará en el tema de los exponentes:

2. $X^{-n} = \frac{1}{X^n}$

3. $\frac{1}{X^{-n}} = X^n$

4. $X^0 = 1$ si x es $\neq 0$ porque 0^0 no está definido

Ejemplo

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

b) $3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{243}$

c) $\frac{1}{3^{-5}} = 3^5 = (3)(3)(3)(3)(3) = 243$

d) $3^0 = 1, \pi^0 = 1, (-5)^0 = 1$

∗ **Toda cantidad elevada a la cero, siempre es igual a uno.**

∗ Todo exponente fraccionario siempre me indica un radical donde el denominador de dicho exponente será el índice del radical y el numerador me indica a lo que queda elevada la cantidad subradical, así:

Como podemos ver, todo radical impar de una cantidad negativa, tiene raíz y conserva el signo de la cantidad subradical, y todo radical par de una cantidad negativa, es llamada cantidad imaginaria.

PROPIEDADES:	EJEMPLOS:
1. $X^m \bullet X^n = X^{m+n}$	$2^3 \bullet 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
2. $X^0 = 1$ Si $X \neq 0$	$2^0 = 1$; $(3xyz)^0 = 1$
3. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$
5. $\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$	$\frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$
6. $\frac{X^a}{X^a} = 1$	$\frac{3^2}{3^2} = 1$
7. $(X^m)^n = X^{m.n}$	$(3^2)^2 = 3^4 = 81$
8 $(xy)^m = x^m y^m$	$(2 \bullet 3)^3 = 2^3 \bullet 3^3 = 8 \bullet 27 = 216$
9 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$
10 $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)$
11 $X^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$
12 $X^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{X^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$

Explicación potenciación http://www.youtube.com/watch?v=rhfNNh-alBI

Explicación potenciación http://www.youtube.com/user/julioprofe

1.7 Bibliografía específica de la unidad.

BALDOR Madrid, Aurelio, Ediciones Códice, Madrid 1985, 576p.

SPRINGER, Clifford H. Matemáticas básicas. México, ediciones Hispanoamericana, 19972. 272 p

URIBE Calad, Julio A. Matemáticas básicas operativas. Ediciones Susaeta, Medellín 1986, 369p

LEITHOLD, Louis El cálculo con geometría analítica, 6 ed. México Editorial Harla 1992, 1563p.

CARDONA R, Alberto, Matemáticas financieras, Bogotá Editorial McGraw - Hill 1986. 315p

MONTOYA Durango, Leonel, Matemáticas financieras, Medellín. L. Montoya D . 1990. 870p

ALVAREZ Arango, Alberto a., Matemáticas financieras. Santa Fé de Bogotá, Editorial McGraw - Hill 1995. 351p

Bibliografía complementaria.

SPIEGEL, Murriay. Teoría y problemas de algebra superior. México McGraw – Hill, 1969. 312 P

REES, Paul K. y SPARKS Fred. Algebra, Ediciones Reverte, México 1970, 447p

DIEZ M. LUIS HORACIO. “Matemáticas operativas“. 9 de, MEDELLIN: EDITEC 1976

Explicación números homogéneos http://www.youtube.com/user/julioprofe

Explicación operación números mixtos http://www.youtube.com/user/julioprofe

Explicación suma y resta de fraccionarios http://www.youtube.com/watch?v=7eCKIMYzfCg

Explicación potenciación http://www.youtube.com/watch?v=rhfNNh-alBI

Explicación potenciación http://www.youtube.com/user/julioprofe

Explicación radicación http://www.youtube.com/watch?v=PaT2DdRhkMo

Racionalización denominadorhttp://www.youtube.com/watch?v=LVNth46dPfU

Racionalización con la conjugación

http://www.youtube.com/watch?v=v5MUqiblORc

educación
a distancia - Virtual
Hace realidad tu proyecto de vida

01

WWW.ESCOLME.EDU.CO / ESCOLMEVIRTUAL@ESCOLME.EDU.CO
CALLE 50 #40-39 / 4442828 EXT: 113 / MEDELLÍN/COLOMBIA